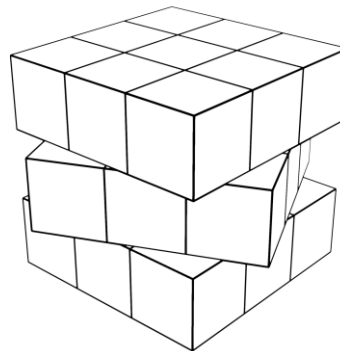


bild der Wissenschaft 12-1980
mit freundlicher Genehmigung

MATHEMATISCHES KABINETT



Mancher verflixte Zauberwürfel liegt immer noch in bunter Unordnung. Dann war es wohl zu schwierig, die fehlenden Zwischenschritte des Lösungsweges im letzten Heft (11/80) auszutüfteln. Deshalb kommen wir nochmal auf den Würfel zurück und bieten eine besonders übersichtliche Strategie des berühmten englischen Mathematikers John Horton Conway (Cambridge), die uns Dr. Adrian R. D. Mathias (Freiburg) gezeigt hat.

Wir sind sicher, daß Sie es endlich schaffen, die einfarbigen Seiten wiederherzustellen, sofern Sie die Züge nur genau in der angegebenen Weise ausführen. Wer sich vertan hat, fängt am besten wieder von vorne an, ohne sich lange über das verdorbene Resultat zu ärgern.

Von Anfang an kann nur Systematik helfen, der Zufall macht jede Bemühung hinfällig. Sehr nützlich sind ein paar Gedanken zur Mathematik des Zauberwürfels. Aber keine Angst, man muß nicht erst Mathematiker werden, um die Strategie zu verstehen.

Für den Mathematiker bilden die Würfelbewegungen eine sogenannte Gruppe. Der geniale Mechanismus des Würfels erlaubt es, die sechs Seitenflächen um ihren Mittelpunkt zu drehen. Die Mitte bleibt also immer an derselben Stelle und bestimmt die Farbe der ganzen Fläche.

Wie im letzten Heft bezeichnen wir Seitendrehungen um 90° im Uhrzeigersinn (Vierteldrehung nach rechts, wenn man auf die Seite schaut) mit den Abkürzungen: O (oben), U (unten),

Verflixt – nochmal

Warum ist der Zauberwürfel so verflixt? Die Mathematik des Würfels ist es, die helfen kann, seine Eigenschaften zu erkennen und eine Strategie zu erfinden. Besonders in England und Ungarn haben sich viele Mathematiker damit beschäftigt und verschiedene Lösungswege gefunden. Mit der folgenden Strategie kann es jeder schaffen.

V (vorn), H (hinten), R (rechts), L (links).

Drehungen der inneren Scheiben lassen wir zunächst außer acht. Die Buchstaben O^{-1} , U^{-1} , V^{-1} , H^{-1} , R^{-1} , L^{-1} bedeuten Drehungen gegen den Uhrzeigersinn.

Alle solche Bewegungen können wir nacheinander am Würfel ausführen und entsprechend in Würfelsprache aufschreiben. Das Wort $VL^{-1}H$ bedeutet also: „Drehe die Vorderseite nach rechts, dann die linke Seite nach hinten, zum Schluß die Hinterseite im Uhrzeigersinn.“ R^2 schreiben wir für RR .

Wollen wir in die Ausgangsposition zurück, kehren wir die Operation um.

Wir lassen den Film rückwärts laufen und führen aus: $H^{-1}LV^{-1}$. Um ein vorgegebenes Wort umzukehren, drehen wir vom Ende her alle Bewegungen um: Aus Drehungen im Uhrzeigersinn werden Drehungen gegen den Uhrzeigersinn und umgekehrt $(VL^{-1}H)^{-1} = H^{-1}LV^{-1}$.

Was liefert die Umkehrung? Es sieht danach so aus, als habe keine Bewegung stattgefunden. Wir haben den „leeren Zug“ angewandt, das heißt die Identität, abgekürzt Id . Jetzt können wir Drehungen formal nachrechnen:

$$\begin{aligned} LL^{-1} &= Id = L^{-1}L \\ (VL^{-1}H)(H^{-1}LV^{-1}) &= VL^{-1}(HH^{-1})LV^{-1} \\ &= VL^{-1}LV^{-1} \\ &= VV^{-1} \\ &= Id \end{aligned}$$

Für die Worte der Würfelsprache haben wir inzwischen folgende Regeln gefunden:

1) Die Worte der Würfelsprache entsprechen eindeutig den Drehungen des Würfels (Abgeschlossenheit).

2) Wir dürfen Bewegungen nacheinander ausführen. Schreibt man die Worte aneinander, so erhalten wir ein neues Wort, eine Drehungsfolge.

Weil die Worte von links nach rechts gelesen werden, gilt das Assoziativgesetz: $A(BC) = (AB)C = ABC$

3) Jedes Wort A besitzt eindeutig eine Umkehrung A^{-1} mit $AA^{-1} = A^{-1}A = Id$.

4) Die Identität bewirkt nichts:

$$Id A = A \quad Id = A.$$

Das sind die Gesetze, die eine Gruppe definieren.

MATHEMATISCHES KABINETT

Strukturen mit diesen Eigenschaften sind seit 100 Jahren Gegenstand mathematischer Arbeiten (Kronecker, Galois, Abel). Ursprünglich klassifizierte man gleiche algebraische Strukturen, die Gruppen, um algebraische Gleichungen zu lösen. Die ganzen Zahlen bilden eine Gruppe bezüglich der Addition. Heute verwendet man Gruppentheorie sowohl in der Relativitäts- und Quantentheorie, als auch um Ornamente zu erzeugen.

Der Zauberwürfel ist natürlich eine endliche Gruppe, selbst wenn es so scheint, als gäbe es unendlich viele Kombinationen. Die Mathematik untersucht auch unendliche Gruppen mit unendlich vielen Elementen.

Eine ganz wichtige Unterscheidung in der Gruppentheorie ist die zwischen kommutativen Gruppen, in denen das Ergebnis von der Reihenfolge der Verknüpfungen unabhängig ist, und den nicht kommutativen Gruppen. Ganze Zahlen beispielsweise dürfen in völlig beliebiger Reihenfolge addiert werden. Ist der Zauberwürfel auch kommutativ, ist $RV = VR$?

Bestimmt nicht! Wer einmal mit dem Würfel gespielt hat, weiß, daß er ganz anders aussieht, wenn man erst rechts, dann vorn, oder wenn man erst vorn und dann rechts dreht. Bei längeren Wörtern sieht man gar nicht mehr, daß eigentlich dieselben Drehungen nur in unterschiedlicher Folge ausgeführt wurden.

Das macht ja gerade das Würfelproblem so kompliziert. Wäre die Drehgruppe kommutativ, dann genügte es, die notwendige Anzahl von Drehungen der verschiedenen Seiten festzustellen. Die Reihenfolge wäre beliebig und der Würfel im Nu in Ordnung.

Die Drehgruppe insgesamt ist nicht kommutativ, aber sie hat Elemente, die für eine Vertauschung verträglich sind, wie R-L, O-U, V-H. Diese Bewegungen sind unabhängig voneinander, weil sie nicht dieselben Teilwürfel drehen.

Unsere Aufgabe lautet nun also: Wir müssen nach allen Spielereien mit dem Würfel das Inverse zu den durchgeführten Drehungen finden. Dieser rückwärts laufende Film erzeugt dann die Identität, so als wäre nie eine Seite gedreht worden. Da wir uns in der Regel nicht gut genug erinnern, ist dieser Vorgang unmöglich.

Wir können nur eine Strategie angeben, die nach und nach jeden Teilwürfel in seine ursprüngliche Position zurückführt, also das Inverse für jeden kleinen Würfel gesondert sucht.

Jetzt fangen wir aber endlich wieder an zu spielen. Denn für die Lösung braucht man nicht einfach Mathematik, sondern hauptsächlich ein dreidimensionales Vorstellungsvermögen und ein gutes Gedächtnis, damit man sich an seine Züge erinnern kann, und natürlich am besten einige Spielerfahrung. Die Gruppenbegriffe systematisieren das Problem, einen Lösungsweg hat man damit noch nicht.

Wir bauen den Würfel von unten nach oben auf. Kein Wunder, daß die Schwierigkeiten nach oben hin zunehmen, denn man hat immer weniger „bewegliche“ Teilwürfel.

Aufsätze zum Würfelproblem bieten meistens lange Listen von Zügen, die einen bestimmten Zweck anstreben, ohne die erreichte Ordnung zu zerstören. Betrachten wir einmal eine solche Drehung am geordneten Würfel, den wir notfalls durch Auseinandernehmen und richtiges Zusammensetzen herstellen. Mit leichter Gewalt beschädigt diese Prozedur den Würfel nicht.

$$\begin{aligned} \text{Was leistet } (RV^{-1}R^{-1}V)^2 \\ = RV^{-1}R^{-1}VRV^{-1}R^{-1}V? \end{aligned}$$

Die Ecke vorn rechts der Oberseite wird im Uhrzeigersinn gedreht, alle anderen Teilwürfel oben werden in der Orientierung und am Platz erhalten. Doch wie kann man jetzt das Durcheinander im unteren Teil reparieren? Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

Wir führen denselben Zug noch zweimal aus und sehen, daß der Würfel wieder richtig ist. Man sagt, diese Drehung hat die Ordnung 3, weil sie bei dreimaliger Anwendung die Identität liefert. Es ist gut, die Ordnung der Drehungen zu kennen. Eine einfache Seitendrehung hat offensichtlich die Ordnung 4.

Eine andere Möglichkeit ist, daß wir erst die Oberseite drehen und dann den inversen Zug ausführen, also $(V^{-1}RVR^{-1})^2$. Jetzt ist der untere Teil in Ordnung, oben wurde eine Ecke im Uhrzeigersinn und eine Ecke, die jetzt rechts vorne ist, gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Um die Positionen oben zu berichtigen, müssen wir noch die Oberseite zurückdrehen.

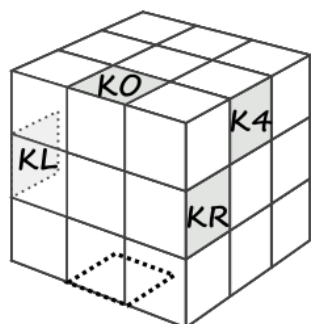
Diesen zweiten Weg nennt der Mathematiker Konjugation. Dabei muß ganz peinlich beachtet werden, daß die Teilwürfel, die gedreht werden sollen, immer erst an dieselbe Position gebracht werden. In unserem Fall war es die Ecke rechts vorn. Sonst wird nämlich die invertierende Wirkung des konjugierten Zuges nicht wirksam. Nach diesen langen Überlegungen sind wir für die Strategie gerüstet.

1. Unterseite

Bei den Ecken und Kanten müssen die seitlichen Farben mit den angrenzenden Seitenmitten übereinstimmen.

a) Kanten

Zunächst ist es möglich, die Kanten der Unterseite in die Mitte oder nach oben wegzudrehen. Die Farbe, die nach unten soll, wird in eine der angegebenen Positionen gebracht (Abb. 1) und der geeignete Zug ausgeführt:

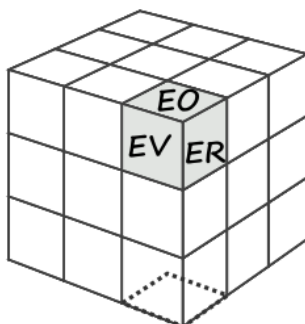


- (KL) V^{-1}
- (KO) V^2
- (KR) V
- (K4) $R^{-1}VR$

b) Ecken

Falls die gesuchte Ecke oben ist, wird sie in die Position rechts vorn gedreht. Je nachdem in welcher Position die Farbe ist, die nach unten soll, hilft einer der Züge EV, ER, EO (Abb. 2).

Ist aber die richtige Ecke unten am falschen Platz, dann kann sie mit dem Würfel nach rechts vorne gedreht werden, und einer dieser Züge befördert sie nach oben.

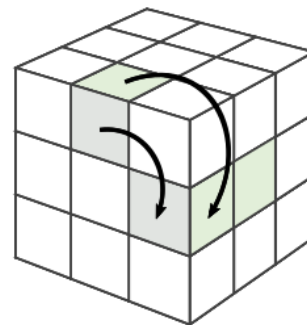


- (EV) $V^{-1}O^{-1}V$
- (ER) ROR^{-1}
- (EO) $V^{-1}OVRO^2R^{-1}$

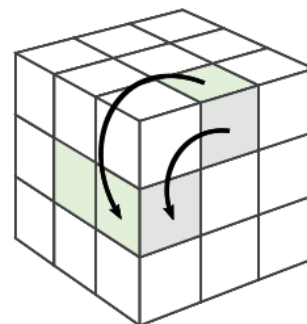
Schon ist die erste Seite fertig.

2. Band

Die Unterseite bleibt nun fest. Die fehlenden Kanten des mittleren Bandes befinden sich entweder in der Oberseite oder an falscher Stelle des Bandes. Im ersten Fall bringen wir die Kante über die Seitenmitte derselben Farbe (Abb. 3). Diese Kante muß nun nach rechts (B1) oder links unten (B2) rutschen.



(B1) $ORO^{-1}R^{-1}O^{-1}V^{-1}OV$



(B2) $O^{-1}L^{-1}OLOVO^{-1}V^{-1}$

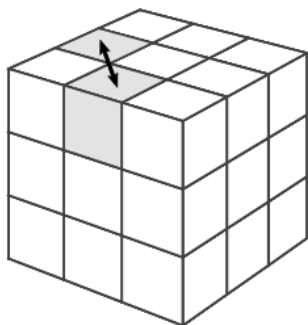
Falls der richtige Teilwürfel an falscher Stelle im Band steht, werfen wir ihn mit B1 oder B2 erst nach oben.

3. Oberseite

Jetzt bleibt nur noch eine Seite übrig. Erst stellen wir die Teilwürfel an den richtigen Platz, danach wird die Orientierung zurechtgerückt.

Position der Kanten

Folgende Drehungsfolge tauscht die benachbarten Kanten vorn und links aus und vertauscht und dreht zusätzlich auch Ecken der Oberseite (Abb. 4):

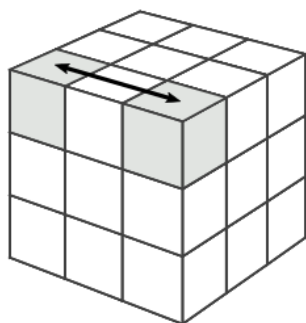


$$(PK1) \text{ OVROR}^{-1}\text{O}^{-1}\text{V}^{-1}$$

Deshalb muß sie vor den oberen Eckendrehungen erfolgen. Der untere Teil wird nicht gestört. Mit wiederholter Anwendung gelangen alle Kanten an die richtige Stelle. (Später geben wir noch abkürzende Tricks an).

Position der Ecken

Ein Zug mit Ordnung 2 vertauscht die beiden vorderen Ecken (Abb. 5):



$$(PE1) \text{ VUV}^2\text{U}^2\text{V}^2\text{U}^{-1}\text{V}^{-1}$$

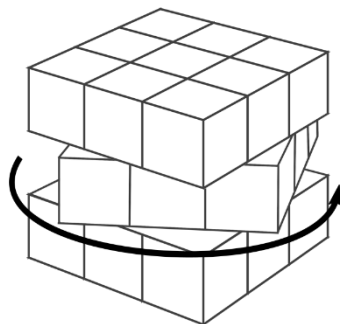
Dabei ist gewährleistet, daß immer nur 0, 2 oder 4 Eckenvertauschungen nötig sind, wenn die Kanten schon am richtigen Platz sind. Auch hier muß wieder beachtet werden, daß die Ecken, die bewegt werden sollen, immer vorn stehen, damit die Konjugation den unteren Teil richtigstellt.

Orientierung der Kanten

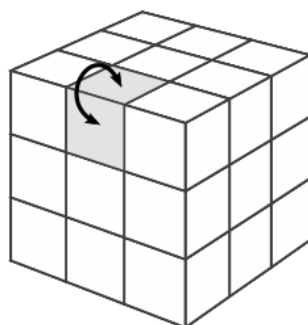
Bisher würden wir den benötigten Zug so schreiben:

$$(OK1) \text{ VU}^{-1}\text{ORU}^{-1}\text{OHU}^{-1}\text{OLU}^{-1}\text{O}$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen und die Drehfolge besser zu durchschauen, führen wir zusätzlich die Scheibendrehung B des Bandes ein (Abb. 6).



Das hat den Vorteil, daß wir die oberen Ecken nicht von ihrer richtigen Stelle wegdrehen. OK1 dreht also abwechselnd die Vorderseite und das mittlere Band im Uhrzeigersinn und erreicht insgesamt, daß die vordere Kante umgedreht wird (Abb. 7). Der untere Teil wird auch verändert.

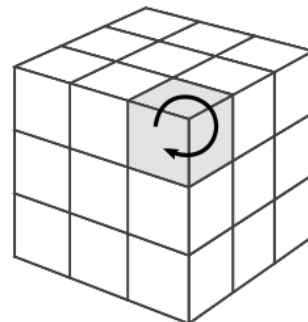


$$(OK1) \text{ (VB)}^4$$

Diese Drehung hat die Ordnung 2. Bringen wir also die nächste Kante, die gekippt werden soll, nach vorn und wiederholen OK1. Damit ordnen wir den unteren Teil zurück.

Orientierung der Ecken

Eine Drehung der Ecke rechts vorn im Uhrzeigersinn (Abb. 8) bewirkt:



$$(OE1) \text{ (RV}^{-1}\text{R}^{-1}\text{V)}^2$$

Wir hatten schon ausprobiert, daß OE1 die Ordnung 3 hat.

Je nachdem, wie die anderen Ecken gedreht werden müssen, holen wir sie nach vorn rechts und wiederholen OE1 oder drehen die Ecken gegen den Uhrzeigersinn mit

$$(OE2) \text{ (V}^{-1}\text{RVR}^{-1})^2.$$

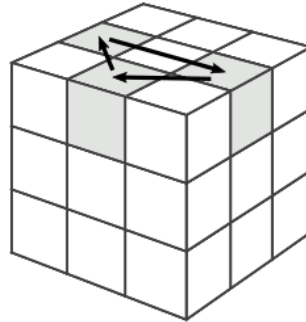
Damit ist der Würfel endlich wieder schön in seiner Ausgangslage.

MATHEMATISCHES KABINETT

Für die schwierigen Fälle der Oberseite folgen nun einige hilfreiche Tricks:

Positionsänderungen

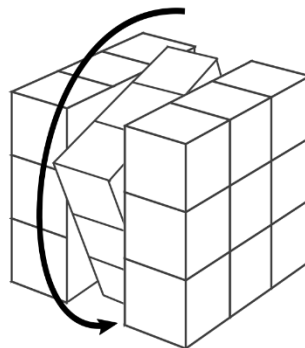
Folgender Zug vertauscht drei Kanten der Oberseite zyklisch im Uhrzeigersinn (Abb. 9):



(PK2) $L^{-1}RHR^{-1}LO^2L^{-1}RHR^{-1}L$

Die Orientierung der Kanten wird dabei verändert, die Ecken bleiben ganz fest.

$L^{-1}R$ entspricht einer Bewegung S der senkrechten Mittelscheibe nach vorn (Abb. 10), $R^{-1}L$ ist die Umkehrung S^{-1} .



Mit dieser Schreibweise verkürzt sich PK2 zu

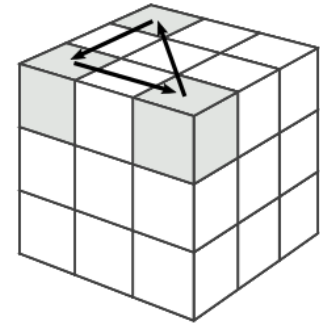
(PK2) $SOS^{-1}O^2SOS^{-1}$.

Sollen die Kanten über Kreuz vertauscht werden, dann erreicht

(PK3) $(L^2R^2U^2)^2$

die Vertauschung zweier gegenüberliegender Kanten. Anzuschließen ist eine Vierteldrehung der Oberseite und die Wiederholung von PK3. Zuletzt wird die Oberseite zurückgedreht.

Mit dem folgenden Zug werden drei Ecken gegen den Uhrzeigersinn zyklisch vertauscht, die Ecke rechts hinten bleibt fest (Abb. 11):



(PE2) $LO^{-1}R^{-1}OL^{-1}O^{-1}RO$

Die entsprechende Drehung im Uhrzeigersinn lautet:

(PE3) $O^{-1}R^{-1}OLO^{-1}ROL^{-1}$

Änderungen der Orientierung

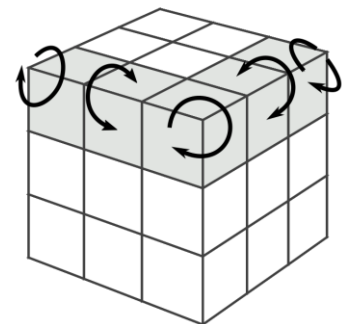
(OE3) $R^{-1}URVUV^{-1}$

Die Ecke rechts vorn wird im Uhrzeigersinn gedreht, entsprechend gegen den Uhrzeigersinn die Umkehrung:

(OE4) $VU^{-1}V^{-1}R^{-1}U^{-1}R$

Vorsicht! Diese Züge haben Ordnung 45. Es muß also jeweils unbedingt die Umkehrung folgen, damit der untere Teil wieder richtig wird. Die Ecken, die gedreht werden sollen, erst nach vorn rechts bewegen!

Eine interessante Drehfolge stammt von D. J. Benson (Cambridge) (Abb. 12):



(OK2) $VOV^2LVL^2OLO^2$

Sie kippt gleichzeitig zwei anliegende Kanten und dreht drei Ecken gegen den Uhrzeiger. Dieser Zug kann natürlich auch invertiert werden, so daß die Ecken sich im Uhrzeigersinn drehen.

MATHEMATISCHES KABINETT

Warum gelingt es immer, den Würfel aus jeder Lage zurückzusetzen? Warum bleibt am Ende nicht manchmal ein einziger Teilwürfel in verdrehter Position? Der Algorithmus, das Ordnungsverfahren, führt tatsächlich immer zum Ziel. Zu einem Algorithmus gehört ein Beweis für das Funktionieren der Methode. Dieser Beitrag kann das natürlich nur andeuten.

Für die Unterseite und das mittlere Band können die Teilwürfel offensichtlich immer in eine Lage und Orientierung gebracht werden, von der aus der Algorithmus anwendbar ist.

Für die Oberseite müßte man jetzt eine detaillierte Untersuchung, eine Fallunterscheidung, anschließen. Wenn die oberen Kanten am richtigen Platz sind, sind es von den Ecken automatisch auch null, eins oder vier. Zwei richtige Ecken tauchen dann nicht mehr auf.

Um das zu verstehen, nehmen wir die Würfeloperationen unter die Lupe. Die Seitendrehungen sind für den Mathematiker auch Permutationen (Vertauschungen) der acht Ecken und zwölf Kanten. Man unterscheidet gerade und ungerade Permutationen, die sich ähnlich verhalten wie die geraden und ungeraden Zahlen. Die Summe von zwei geraden Zahlen ist wieder gerade. Die Summe einer geraden mit einer ungeraden Zahl ist ungerade. Die „Hälfte“ der Zahlen ist gerade, die „andere Hälfte“ ist ungerade. Das ist bei den Permutationen genauso. Man kann nachrechnen, daß der geordnete Würfel genau alle geraden Permutationen erlaubt. Seitendrehungen sind gerade Permutationen. Und zwei gerade Permutationen nacheinander sind ja wieder gerade.

Hätten wir zum Schluß der Strategie nur noch zwei Kantenwürfel zu vertauschen, dann wäre diese Situation eine ungerade Permutation, zu der man nur gelangt, wenn man den Würfel auseinandernimmt und falsch zusammenbaut. Damit ist gezeigt, daß die Positionierung der Teilwürfel immer erreicht werden kann. Ähnliche Paritätsargumente kann man sich auch für die Orientierungen überlegen.

Dieser Überblick macht es schon möglich auszurechnen, wieviele Ge-

sichter der Würfel haben kann. Dazu bauen wir den Würfel im Geiste zusammen. Die Seitenmitten sind fest. Für den ersten Eckenwürfel gibt es acht verschiedene Stellen zur Auswahl, für den zweiten dann nur noch sieben, für den dritten sechs Eckplätze und so fort. Für alle Ecken sind das $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ (Fakultät) Möglichkeiten. Die Kanten haben entsprechend $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 1 = 12!$ verschiedene Anordnungen.

Weil eine Ecke drei Farben besitzt, kann sie auf drei verschiedene Weisen eingesetzt werden. Kombiniert man diese Alternativen für alle Ecken, so erhält man 3^8 Orientierungen. Jede der zwölf Kanten hat zwei Farben, das sind insgesamt 2^{12} Kantenorientierungen. Setzt man die Möglichkeiten für die Position und die Orientierung zusammen, dann kann der Würfel auf $3^8 \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 8!$ Arten aufgebaut werden.

Wir haben aber gesehen, daß nicht alle Permutationen erlaubt sind. Für die Position kommen nur die geraden Permutationen in Frage, das sind die Hälfte der Positionen, also

$$12! \cdot 8! / 2.$$

Weiter sind aus Paritätsgründen nur ein Drittel der Eckenorientierungen, $3^8/3$, und die Hälfte der Kantenorientierungen, $2^{12}/2$ möglich. Damit haben wir für den Zauberwürfel die unvorstellbare Zahl von

$$\frac{12! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

möglichen Gesichtern ausgerechnet.

Wer mit dem Würfel vertraut ist, sucht nun nach anderen Aufgaben und neuen Mustern. Besonders regelmäßige Symmetrien entstehen bei den Elementen der „Slice“- und „Antislice“-Gruppen. Die „Slice“-Gruppe besteht aus allen Scheibendrehungen. Für die „Antislice“-Gruppe werden gegenüberliegende Seiten voneinander weggedreht, also beide im oder beide gegen den Uhrzeigersinn.

(Beispiel: RL, $O^{-1} U^{-1}$).

Die Phantasie wird ja nur durch die gerade ausgerechneten 43 Trillionen Möglichkeiten eingeschränkt.

Version vom 2024-07-05

Hintergrund:

Dieses Dokument ist ein restaurierter Scan des Originalartikels:

bild der Wissenschaft 12-1980: Mathematisches Kabinett:
„Verflixt – nochmal“

Kleine Änderungen waren notwendig:

- Die Aufteilung des Artikels in die drei Spalten wurde zwecks Übersichtlichkeit verändert.
- Die Originalbilder wurden durch Bilder von V. und S. Schubert ersetzt, um eine Freigabe zu erhalten. Die Drehbilder sind im Vergleich zu den Originalen etwas vereinfacht. Das alte Titelbild zeigte einen Würfel mit angedeuteten Drehbewegungen.
- Einmal wurde 1 Bild durch 2 Bilder ersetzt.
- Die Namen/Kürzel der Züge im Abschnitt „1. Unterseite“ wurden geändert.
- Abschnitt „Orientierung der Kanten“ wurde leicht erweitert.
- Schreibfehler wurden korrigiert: „ $2^{1/2}$ “

Das Recht zur Weitergabe dieser Fassung wurde freundlicherweise erteilt durch die Redaktion *bild der wissenschaft* am 2024-06-06.

Danke an Simon für das Titelbild.

Wie *bild der wissenschaft* schreibt, wurde Ihnen das Verfahren vom Mathematiker [Adrian R. D. Mathias](#) gezeigt. Dieser war in Cambridge ein Doktorand beim nur 7 Jahre älteren [John Conway](#).